

**ОПТИМАЛНО ПО БЪРЗОДЕЙСТВИЕ ПРОГРАМНО УПРАВЛЕНИЕ НА КЛАС
ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ****TIME - OPTIMAL CONTROL OF A CLASS OF LINEAR SYSTEMS**

Радослав Хр. Радев Елена Д. Монова*
Технически Университет - Габрово

Статията е постъпила на 26.02.2014 г.; приета за отпечатване на 06.03.2014 г.

Abstract

This paper deals with the problem of fast response on optimal control of linear systems. On the basis of the maximum principle and n -intervals theorem an algorithm and program for calculating the moments of switching control it is proposed.

Keywords: optimal control, maximum principle, n -intervals theorem, linear systems.

ВЪВЕДЕНИЕ

Понятието оптимално управление означава управление, най-добро в определен смисъл. При оптималното управление се дефинира критерий за оптималност, който трябва да приеме екстремална стойност (минимум или максимум) при наложените върху системата ограничения. Оптимални по бързодействие системи са системи, при които критерият за оптималност е времето за протичане на преходния процес.

Обща постановка за синтез на оптимални по бързодействие системи с помощта на *теоремата* за n -те интервала се разглежда в [9], а обобщаване на вида на управляващото въздействие - чрез *принципа на максимума*, при който е доказано, че това управление трябва да приема граничните си стойности [7, 8]. Основен проблем при синтеза на система за управление на различни обекти е определянето на моментите на превключване на управляващото въздействие. В общия случай определянето на тези моменти се извършва с помощта на числени пресмятания основно със стандартни програми [1, 2, 4, 6]. В [3] са предложени методи и алгоритъм за пресмятане моментите на превключване на система с обект със закъснение, а за системи с неточен модел на обекта [5] се предлага тези моменти да се определят чрез методи за обучение.

В статията се разглежда система, описвана с уравнението:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1)$$

където:

$\mathbf{x}(t)$ е n -мерен вектор на състоянието;

$\mathbf{u}(t)$ - m -мерен вектор на управлението, върху който е наложено ограничението:

$$\mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}. \quad (2)$$

Под оптимално програмно управление на систе-

мата се разбира управлението $\mathbf{u}_{opt}(t)$, удовлетворяващо (2), при което при зададено начално състояние $\mathbf{x}(t_0)$ в момента t_0 и зададено крайно състояние $\mathbf{x}(t_f)$ в момента t_f , минимизира функцията:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (3)$$

където подинтегралната функция:

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4)$$

представява избрания критерий за оптималност.

При оптималните по бързодействие системи функцията (4) е:

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 1, \quad (5)$$

а (3) приема вида:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0 = T, \quad (6)$$

където T е продължителността на преходния процес.

От принципа на максимума [7, 8] е известно, че минимизацията на (3) се получава, т.е. управлението е оптимално, когато приема граничните си стойности:

$$\mathbf{u}(t) = \pm |\mathbf{U}|. \quad (7)$$

ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

Предмет на разглеждане в настоящата работа са линейни системи с един вход от вида:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (8)$$

при които собствените стойности на матрицата $\mathbf{A}$ са реални, неположителни числа. За този клас системи от теоремата за n -те интервала [9] следва, че минимизацията на (6) се извършва чрез последователно превключване на управлението $n-1$ пъти, където n е размерността на системата и същевременно изпълняващо

*E-mail: elena_dvm@yahoo.com

условието (7). Моментите на превключване на управлението t_i , при зададен модел на системата, зависят от зададените начално $\mathbf{x}(t_0)$ и крайно $\mathbf{x}(t_f)$ състояния на системата. В смисъла на теоремата за n -те интервала:

$$t_f = t_n. \quad (9)$$

По същество, пресмятането на моментите на превключване представлява проблем на двуточковата гранична задача, при която за част от уравненията са зададени началните условия, а за останалата част – крайните условия.

Управлението $u(t)$ на системата (8) в поредните интервали ще приема граничните стойности съответно u_1 и u_2 , които за всеки интервал остават постоянни.

При тези условия математичният модел на системата може да се представи във вида:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (10)$$

където:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u_i(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}u_i \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix},$$

а началните и крайните условия за целия интервал на управление са съответно:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \hat{\mathbf{x}}(t_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_n) \\ 0 \end{bmatrix},$$

а u_i е управлението в съответния интервал.

АЛГОРИТЪМ ЗА ПРЕСМЯТАНЕ НА МОМЕНТИТЕ НА ПРЕВКЛЮЧВАНЕ

В основата на алгоритъма за пресмятане на моментите на превключване е свойството, че стойността на вектора на състоянието в края на всеки интервал се явява начална стойност за следващия интервал.

Ако за произволен интервал на управление между i -тото и $(i+1)$ -вото превключване решението на уравнението (10) е:

$$\hat{\mathbf{x}}_i(t) = e^{\hat{\mathbf{A}}_i t} \hat{\mathbf{x}}(t_{i-1}), \quad (11)$$

където $\hat{\mathbf{x}}(t_{i-1})$ е стойността на вектора на състоянието в края на $(i-1)$ -я интервал, то за всички интервали на управлението динамиката на системата ще се опише с поредицата:

$$\begin{aligned} \text{I интервал} \quad \hat{\mathbf{x}}(t_1) &= e^{\hat{\mathbf{A}}_1 t_1} \hat{\mathbf{x}}(t_0) \\ \text{II интервал} \quad \hat{\mathbf{x}}(t_2) &= e^{\hat{\mathbf{A}}_2 t_2} \hat{\mathbf{x}}(t_1) \\ &\dots\dots\dots \\ \text{n-ми интервал} \quad \hat{\mathbf{x}}(t_n) &= e^{\hat{\mathbf{A}}_n t_n} \hat{\mathbf{x}}(t_{n-1}) \end{aligned}, \quad (12)$$

където:

$\hat{\mathbf{A}}_n = \hat{\mathbf{A}}_1$, ако n е нечетно число и $\hat{\mathbf{A}}_n = \hat{\mathbf{A}}_2$, ако n е четно число.

Системата n на брой нелинейни уравнения (12) с неизвестни $t_1, t_2, \dots, t_n$ и известни начално $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ и крайно $\hat{\mathbf{x}}(t_n)$ състояния определят моментите на превключване на управлението $u(t)$.

ЕКСПЕРИМЕНТИ

За пресмятане на моментите на превключване и за симулиране на системата е използван програмният продукт MatLab/ Simulink.

В m -файл е зададена системата посредством коефициентите на диференциалното уравнение, с което тя се описва. За представянето ѝ в пространство на състоянието, от зададените коефициенти се пресмятат матриците **A**, **B**, **C** и **D** във фазово-координатна канонична форма (ФККФ). Изборът за представянето на системата във ФККФ е съобразено с това, изходът ѝ съвпада с елемента x_1 във вектора на състоянието. В програмата се извършват числени пресмятания, в резултат на които се получават стойностите на всеки един момент на превключване на управлението, както и стойностите на системата в тези моменти.

Получените чрез m -файла стойности на моментите на превключване t_i , се използват за да се симулира системата в Simulink и да се визуализира динамиката ѝ в получените времеви интервали.

РЕЗУЛТАТИ

Моделът на системата, за която са направени симулациите, има вида:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y + a_3 u = b_3 u.$$

Разглеждат се два случая:

- Случай 1: $a_1 = 6$; $a_2 = 11$; $a_3 = 6$; $b_3 = 60$;

- Случай 2: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; $b_3 = 15$.

За случай 1 съгласно (10), матрицата **A** на разширената система се представя във вида

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а зададените начално и крайно състояния на системата са:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \hat{\mathbf{x}}(t_n) = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Размерността на системата е $n = 3$, от което съгласно теоремата за n -те интервала следва, че минимизацията на (6) се извършва чрез последователно превключване на управлението два пъти. За така зададените начално и крайно състояния са пресметнати моментите на превключване на управлението

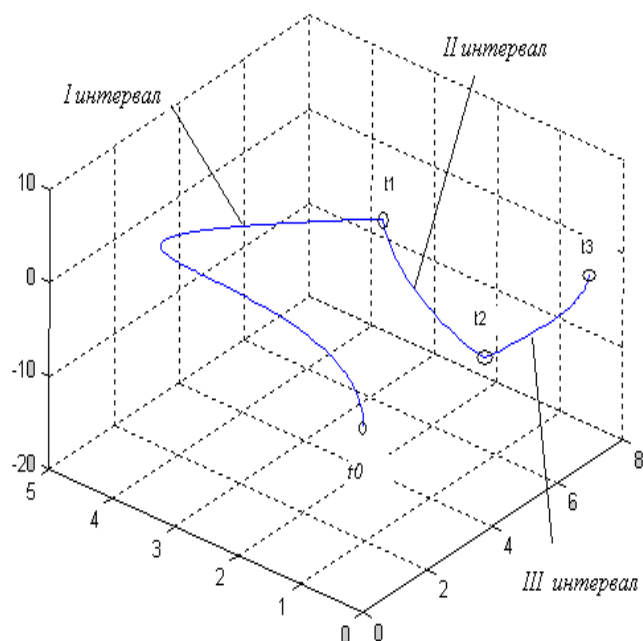
$$t_1 = 2.0001, \quad t_2 = 2.1587, \quad t_3 = 2.4679,$$

където t_3 е крайният момент t_f .

Стойностите на трите елемента на вектора на състоянието във всеки един момент на превключване са:

$$x(t_1) = \begin{bmatrix} 6.4650 \\ 3.0352 \\ -2.0852 \end{bmatrix}, \quad x(t_2) = \begin{bmatrix} 6.8573 \\ 1.6098 \\ -13.7149 \end{bmatrix}, \quad x(t_3) = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

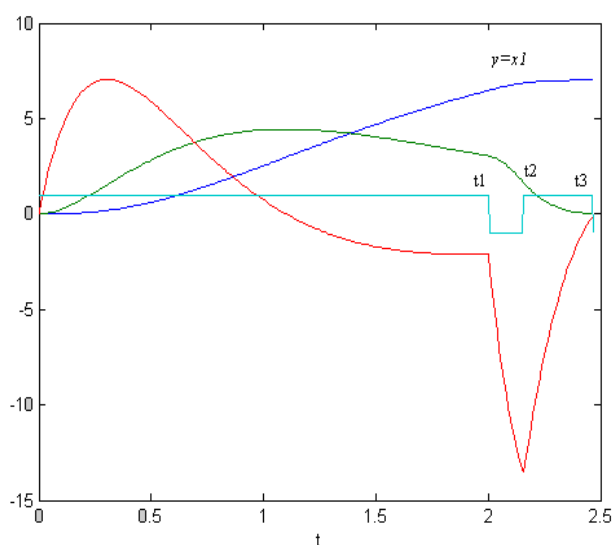
На фиг.1 е показана траекторията на системата в тримерното пространство, като са отбелязани трите момента t_1 , t_2 и t_3 и интервалите между тях.



Фиг. 1. Траектория на системата в пространство на състоянието за случай 1

На фиг. 2 са показани времевите характеристики на системата и видът на управлението, за което ясно се виждат моментите на превключване. На фигурата също така се вижда, че в крайния момент $t_3 = 2.4679$, системата е достигнала зададеното крайно състояние

$$\hat{x}(t_n) = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Фиг. 2. Управлящо въздействие и времеви характеристики на системата за случай 1

За случай 2 матрицата A на разширената система, съгласно (10) има вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

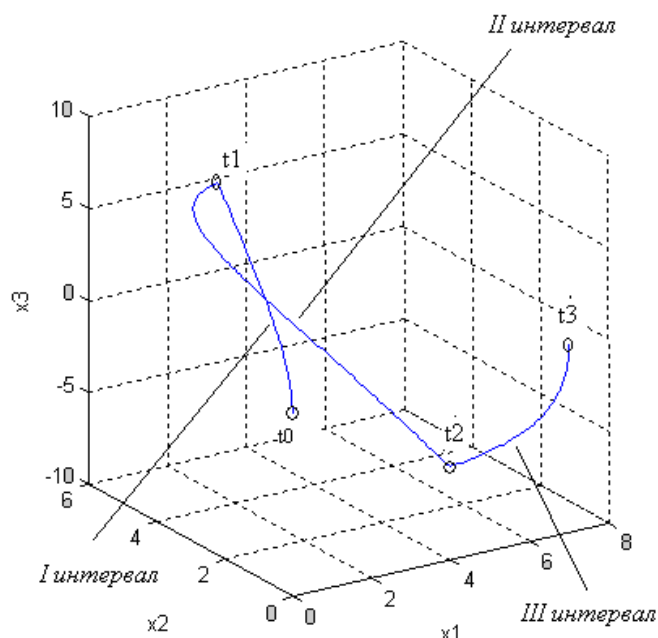
а зададените начално и крайно състояния на системата са същите както в случай 1:

$$\hat{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \hat{x}(t_n) = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

И в този случай минимизацията на (6) се извършва чрез превключване на управлението два пъти, като получените стойности за моментите на превключване са:

$$t_1 = 0.6156, t_2 = 1.8469, t_3 = 2.4626,$$

където отново t_3 е крайният момент t_f .



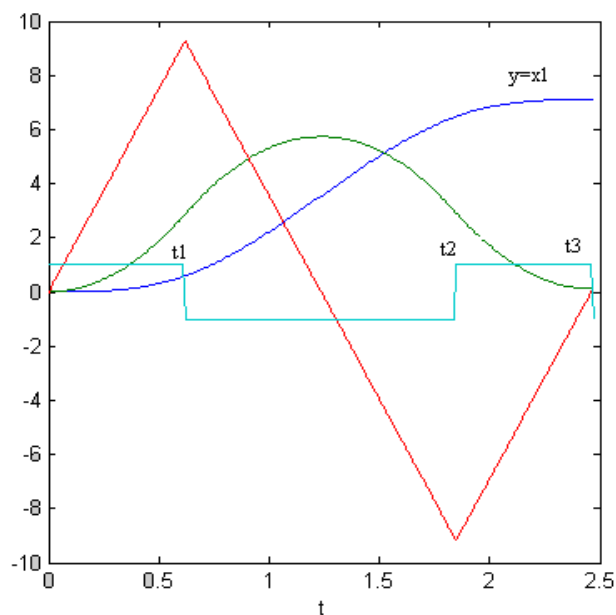
Фиг. 3. Траектория на системата в пространство на състоянието за случай 2

Траекторията на системата в тримерното пространство за втория случай е показана на фиг. 3, като са отбелязани трите момента на превключване t_1 , t_2 и t_3 и интервалите между тях.

Стойностите на трите елемента на вектора на състоянието във всеки един момент на превключване са:

$$x(t_1) = \begin{bmatrix} 0.5833 \\ 2.8426 \\ 9.2346 \end{bmatrix}, x(t_2) = \begin{bmatrix} 6.4167 \\ 2.8426 \\ -9.2346 \end{bmatrix}, x(t_3) = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Времеви характеристики на системата и видът на управлението са показани на фиг.4. От графиките се вижда, че в крайния момент $t_3 = 2.4626$, системата е достигнала зададеното крайно състояние.



Фиг. 4. Управлящо въздействие и времеви характеристики на системата за случай 2

ИЗВОДИ

Предложен е алгоритъм и програма за пресмятане моментите на превключване на управлението за оптимална по бързодействие система. Показани са резултатите от симулирането, от които се вижда, че в крайния

момент t_3 системата и в двата случая е достигнала зададеното крайно състояние.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Haggerty, J., T. Singh. Time-optimal output transitions for minimum phase systems: A frequency domain approach to post-actuation. American Control Conference (ACC), 2012, vol., no., pp.5354-5359, 2012.
- [2] Lewis, F. L., D. Vrabie, V. L. Syrmos. Optimal control. John Wiley & Sons, 2012.
- [3] Modarres S. M. S., S. M. Karbassi. Time-optimal control of discrete-time linear systems with state and input time-delays. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 5(9), pp.2619-2625, 2009.
- [4] Shen, Z., P. Huang, S. B. Andersson. Calculating switching times for the time-optimal control of single-input, single-output second-order systems. Automatica, 2013.
- [5] Trogmann H., P. Colaneri, L. del Re. Learning Time Optimal Control of Smart Actuators with Unknown Friction. Nonlinear Control Systems, Vol. 9(1), 2013.
- [6] Zhang C., The Time Optimal Control with Constraints of the Rectangular Type for Linear Time-Varying ODEs, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 51(2), pp. 1528-1542, 2013.
- [7] Понтрягин, Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. Наука, Москва, 1989.
- [8] Понтрягин, Л.С., В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов.Наука, Москва, 1983.
- [9] Фельдбаум, А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. Наука, Москва, 1966.